スタンダードブラウン運動における停止時刻ゲーム問題の分割(確率ゲーム理論とその周辺)

安田, 正実

数理解析研究所講究録
第 741 巻 1991 年 43-49

スタンダードブラウン運動における停止時刻ゲーム問題の分割

千葉大・教養 安田正実 (Masami YASUDA)

はじめに

時間一様な一次元確率過程, とくに standard Brownian motion にたいする最適停止時刻問題を考える. もし利得も時刻によらないなど適当な仮定があるならば, 最適政策は, 状態だけの関数で閾値型 (threshold policy, control limit policy) となる. 例えば, 利得関数が増加関数であるときの最小化問題では, 状態の値が小さいうちは継続であるが, 大きくなると停止という決定を下すのが自明な最適となる.

一方, ゲーム問題として最適停止時刻問題を変形した停止ゲーム問題の場合においても, 具体的な閾値型として最適戦略が定められると予想されよう. 本報告では, 停止ゲーム問題における最適政策の閾値を定め, さらにゲーム値を 2 つの最適停止問題に分割することを考える.

1. Introduction

簡単にするため, ここではゼロ和ゲーム問題を対象とする. 競争的状態にある 2 人プレイヤーが混合戦略でなく, 単純戦略で均衡していて, 2 人プレイヤーそれぞれの決定が状態の関数である閾値型となるようなゲーム問題を取り扱う. 原点にほぼ対称的様相となるような条件を仮定し, ゲーム問題の停止継続の領域を分割する. 分割されたものは, それぞれ通常の最適停止問題となる. つまり, 与えられた停止ゲーム問題を, 適当な 2 つの最適停止問題に分離をする. この状況に対応した最適戦略は, 数直線上の原点を中心とした部分では

継続で，左右の半無限区間では停止という決定をする．このようなゲームの戦略はごく自然なものと考えられる．

ごく簡単な確率過程として standard Brownian motion:$\{x_t; t \geq 0\}$,

$$x_t = \mu dt + \sigma dw_t, \quad x_0 = x \tag{1.1}$$

(ただし $\mu, \sigma \neq 0$ は定数とする) をあつかうことにする．この system における停止ゲーム問題 ([2],[5]など) の定式化から述べよう．

3つの payoff : $\varphi(x), \psi(x), \chi(x); -\infty < x < \infty$ と2つの stopping time: τ, σ にたいして，プレイヤー1は τ を選んで期待利得の最小化，プレイヤー2は σ を選んで最大化を図るとする．ゼロ和ゲームとしての均衡を考え，

$$\begin{aligned} \overline{w}(x) &= \inf_{0 \leq \tau < \infty} \sup_{0 \leq \sigma < \infty} E^x[R(\tau, \sigma)] \\ \underline{w}(x) &= \sup_{0 \leq \sigma < \infty} \inf_{0 \leq \tau < \infty} E^x[R(\tau, \sigma)] \end{aligned} \tag{1.2}$$

を定義する．ただし

$$R(\tau, \sigma) = e^{-\alpha\tau}\varphi(x_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau<\sigma\}} + e^{-\alpha\sigma}\psi(x_\sigma)\mathbf{1}_{\{\tau>\sigma\}} + e^{-\alpha\tau}\chi(x_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau=\sigma\}}$$

で $\mathbf{1}_{\{A\}}$ は A の indicator, E^x は初期値 $x_0 = x$ とした条件つき期待値とする．

仮定 1. 3つの payoff について

$$\varphi(x) < \chi(x) < \psi(x); \quad -\infty < x < \infty. \tag{1.3}$$

この仮定があれば，(1.2) の2つの値は一致するから，それを $w(x)$ とおけば，$w(x) = \overline{w}(x) = \underline{w}(x)$ が知られている ([12]など)．つまり，ゼロ和行列ゲームが確定し，これらの minmax， maxmin 値 は等しい．このゲーム値を payoff 行列にたいする記号 val をもちいると，動的計画法の最適方程式に相当する式が得られる：

$$\operatorname{val}\begin{bmatrix} \chi - w & \varphi - w \\ \psi - w & Aw - \alpha w \end{bmatrix} = 0 \tag{1.4}$$

ただし $\mathcal{A}w = \dfrac{\sigma^2}{2}w'' + \mu w'$. さらにゲーム問題の最適戦略は, 混合戦略でなく単純戦略の中に存在し,

$$w = \varphi, \qquad w = \psi \qquad \& \qquad \mathcal{A}w - \alpha w = 0$$

しか起らないことが知られている ([18]). これらの等式が成り立つ領域は, それぞれプレイヤー1の stop, プレイヤー2の stop および 両方の continue region を表している. また双方同時に stop することが起らないことも意味している. したがって payoff にある程度の仮定を設ければ, 数直線が3つの区間に分割されることが期待される. このときには, 区間が3つに分れるのであるから, 2つの閾値 z_1, z_2 と関数 w を求める two obstacle problem ([11]) とよばれる自由境界問題である. したがって適当な条件のもとで, 関数 $w = w(x); -\infty < x < \infty$ と値 z_1, z_2 が

$$\begin{aligned} w(x) &= \varphi(x) \quad \text{for} \quad z_1 < x \\ w(x) &= \psi(x) \quad \text{for} \quad x < z_2 \\ \mathcal{A}w(x) - \alpha w(x) &= 0 \quad \text{for} \quad z_2 \le x \le z_1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

を満たすように定める問題, 自由境界問題に帰着される.

ここではさらに, この停止ゲーム問題のゲーム値 $w = w(x)$ を分割することを考える. もし上のように解が与えられるならば, その形から分るように数直線上の右の部分はプレイヤー1だけの最小化停止問題であり, 左の部分はプレイヤー2の最大化停止問題とみなせる. したがって, つぎの節では それぞれがこのゲーム問題に対応するような最適停止問題の構成を考えることにする.

2. Two optimal stopping problems

つぎの2つは, いわゆる最適停止問題であるが, 原点で吸収をさせ, 正の部分だけ, あるいは負の部分だけに領域を制限している. あらかじめ, 原点での利得 k と2つの関数 φ, ψ は与えられたとする.

プレイヤー1の利得 φ の最小化問題 (I):

$$u(x) = u(x;k) = \inf_{0 \le \tau < \infty} E^x[\varphi(x_\tau)e^{-\alpha\tau}\mathbf{1}_{\{\tau < \sigma_0\}} + ke^{-\alpha\sigma_0}\mathbf{1}_{\{\sigma_0 \le \tau\}}], \quad x \ge 0 \tag{2.1}$$

プレイヤー 2 の利得 ψ の最大化問題 (II) :

$$v(x) = v(x;k) = \sup_{0 \le \sigma < \infty} E^x[\psi(x_\sigma)e^{-\alpha\sigma}\mathbf{1}_{\{\sigma<\tau_0\}} + ke^{-\alpha\tau_0}\mathbf{1}_{\{\tau_0 \le \sigma\}}], \quad x \le 0 \tag{2.2}$$

ただし それぞれの問題で $\tau_0 = \inf\{t \ge 0; x_t \le 0\}$, $\sigma_0 = \inf\{t \ge 0; x_t \ge 0\}$ とする.

仮定 2. 2 つの関数 $\varphi(x), \psi(x)$ についてそれぞれの領域について

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\varphi(x) - \alpha\varphi(x) > 0 \quad &\text{for} \quad x > 0 \\ \mathcal{A}\psi(x) - \alpha\psi(x) < 0 \quad &\text{for} \quad x < 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

を仮定する.

補題 2.1. (1) 問題 (I),(II) にたいする最適方程式はそれぞれ, つぎで与えられる :

$$\begin{aligned} \min\{\mathcal{A}u(x) - \alpha u(x),\ \varphi(x) - u(x)\} = 0 \quad \text{for} \quad x > 0, \qquad u(0) = k \\ \max\{\mathcal{A}v(x) - \alpha v(x),\ \psi(x) - v(x)\} = 0 \quad \text{for} \quad x < 0, \qquad v(0) = k \end{aligned} \tag{2.4}$$

(2) 最小化問題 (I) の stop region は $(0,\infty)$, 最大化問題 (II) の stop region は $(-\infty,0)$ に含まれる.

(*proof*) (1) はよく知られた最適方程式で, 原点では吸収が起こるから, 利得 k を得る関係式が加わる. (2) は Dynkin formula を用いた Infinitesimal Looking Ahead policy([14]) を考えてみると, 続ければ続けるほど期待利得が減少あるいは増加をするから, これらの領域は最大化, 最小化を考えると stop region になる. しかし Process の変動が単調ではないから, ILA policy での意味で closed になっていない. したがってそれぞれの領域のなかで, ある部分領域が最適な stop region である.

記号. λ_1, λ_2 と関数 $C_1(x;f), C_2(x;f), C(x;f)$ の定義

(i) 実数 λ_1, λ_2 とは $\lambda_1 \ge \lambda_2$ で$\sigma^2\lambda^2 + 2\mu\lambda - 2\alpha = 0$ の 2 実数解とする.

(ii) 関数 $f = f(x), -\infty < x < \infty$ にたいし,

$$\begin{aligned} C_1(x;f) &= \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}\{f'(x) - \lambda_2 f(x)\} \\ C_2(x;f) &= \frac{e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}\{\lambda_1 f(x) - f'(x)\} \\ C(x;f) &= C_1(x;f) + C_2(x;f) \end{aligned} \tag{2.5}$$

を定める.

この関数を用いると, 最適停止問題 (I),(II) の最適値を表現できる.

補題 2.2.

(2.6i)
$$u(x;k)=\begin{cases} C_1(z_1;\varphi)e^{\lambda_1 x}+C_2(z_1;\varphi)e^{\lambda_2 x} & 0\le x\le z_1 \\ \varphi(x) & x\ge z_1 \end{cases}$$

ここで z_1 は k に依存して $k=C(z_1;\varphi)$. 同様に

(2.6ii)
$$v(x;k)=\begin{cases} C_1(z_2;\psi)e^{\lambda_1 x}+C_2(z_2;\psi)e^{\lambda_2 x} & z_2\le x\le 0 \\ \psi(x) & x\le z_2 \end{cases}$$

また z_2 は k に依存して $k=C(z_2;\psi)$.

(*proof*) この standard Brownian motion は regular であるから, 最適値が連続微分可能. したがって smooth fit([17]) が成り立っているから, $u(x)=\varphi(x)|_{x=z_1}, u'(x)=\varphi'(x)|_{x=z_1}$ を解いて (2.6i) を得る. 同様に (2.6ii) は $v(x)=\psi(x)|_{x=z_2}, v'(x)=\psi'(x)|_{x=z_2}$ から得られる.

3. Separation of the stopping game problem

2 つの最適停止問題を合併させ, 2 つを分けている原点での整合性をもたせなければならない. ゆえに, k の値をうまく定める必要が生じる. そのためにある非線形連立方程式を考える. 状態空間を正と負の部分に分割したから, 方程式では $\{(z_1,z_2);z_1>0,z_2<0\}$ における解に注目する.

補題 3.1. 関数 φ,ψ が (2.3) を満たすよう与えられたとき, つぎの $\{(z_1,z_2);z_1>0,z_2<0\}$ に関する連立方程式;

(3.1)
$$C_1(z_1;\varphi)=C_1(z_2;\psi),\qquad C_2(z_1;\varphi)=C_2(z_2;\psi)$$

は高々一つの解をもつ.

(*proof*) まず (2.5) を微分すると, それぞれ

$$C_1'(x;f)=\frac{2e^{-\lambda_1 x}}{(\lambda_1-\lambda_2)\sigma^2}\{\mathcal{A}f(x)-\alpha f(x)\}$$
$$C_2'(x;f)=\frac{-2e^{-\lambda_2 x}}{(\lambda_1-\lambda_2)\sigma^2}\{\mathcal{A}f(x)-\alpha f(x)\}$$

となる．これから φ, ψ の仮定 1 より，$C_1(x;\varphi)$ は strictly increasing, $C_1(x;\psi)$ は strictly decreasing. したがって曲線 $\{(x,y); C_1(x;\varphi) - C_1(y;\psi) = 0\}$ は $\{x > 0, y < 0\}$ で x が増加すると y は減少する．同様に $C_2(x;\varphi)$ は strictly decreasing, $C_2(x;\psi)$ は strictly increasing であるから，曲線 $\{(x,y); C_2(x;\varphi) - C_2(y;\psi) = 0\}$ は x が増加すると y も増加する．単調性により，2 点で交わることとは起らない．

定理 3.2. 連立方程式 (3.1) の解 z_1, z_2 が存在すれば，停止ゲーム問題のゲーム値 $w(x)$ は 2 つの最適停止問題の最適値に分離することができる．すなわち

$$w(x) = \begin{cases} u(x;k) & x \geq 0 \\ v(x;k) & x \leq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

ただし $k = C(z_1;\varphi) = C(z_2;\psi)$.

(*proof*) 仮定 (1.3) と仮定 (2.3) により，$w = w(x); -\infty < x < \infty$ は stop region では

$$w(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \geq z_1 \\ \psi(x) & x \leq z_2 \end{cases}$$

また continue region では $\mathcal{A}w(x) - \alpha w(x) = 0;\ z_2 < x < z_1$ の形で，境界の点では smooth fit が成り立っている．もし z_1 と z_2 が上の連立方程式の解であれば，補題 2.2 により，2 回連続微分可能で接続することができる．したがって原点での k の値の定め方から，(3.2) の表現を得る．

参考文献

[1] Bather, J.; *Optimal stopping problems for Brownian motion*, Adv. Appl. Prob.,**2** (1970) 259-286.

[2] Bismut, J. M.; *Sur un probleme de Dynkin*, Z. Wahr. Verw Gebiete **39** (1977) 31-53.

[3] Benes, V. E., Shepp, L. A. and Witsenhausen, H. S.; *Some solvable stochastic control problems*, Stochastics **4** (1980) 39-83.

[4] Bensoussan, A. and Lions, J. L.;*Nouvelles Methodes en Control Impulsionnel*, Appl. Math. Optim. **1** (1975) 289-312.

[5] Dynkin, E. B.;*Game variant of a problem on optimal stopping*, Soviet Math. Dokl. **10**(1969) 270-274.

[6] Harrison, J. M.;Brownian motion and stochastic flow systems, John Wiley, New York, 1985.

[7] Harrison, J. M., Selleke, T. M. and Taylor, A. J.; *Impulse Conrtol of Brownian Motion*, Math. Oper. Res. **8** (1983) 454-466.

[8] Heyman, D. P. and Sobel, M.;Stochastic Models in Operations research, II: *Stochastic Optimization*, McGraw-Hill, 1982.

[9] Karatzas, I. and Shreve, S. E.;*Equivalent models for finite-fuel stochastic control*, Stochastics **18** (1986) 245-276.

[10] Karatzas, I.;*Gittens indices in the dynamic allocation problem for diffusion processes*, Ann. Prob. **12** (1984) 173-192.

[11] Kinderlehrer, D.,Stanpacchia, G;An Introduction to Variational Ineqalities and their Applications, Academic Press, 1980, New York.

[12] Neveu, J.;Discrete-Parameter Martingales, North-Holland, 1975, Amsterdam.

[13] Ohtsubo, Y.;*Neveu's martingale conditions and closedness in Dynkin stopping problem with a finite constraint*, Stoch. Proc. Appli. **22**(1986) 333-342.

[14] Ross, S. M.;Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden Day, 1970, San Francisco.

[15] Stanerfozo, R.;*Monotone optimal policies for Markov decision processes*, Math. Prog. Study **6** (1976) 202-215.

[16] Stettner, L.;*On closedness of general zero-sum stopping game*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **32**(1984) 351-361.

[17] Van Moerbeke, P.;*On optimal stopping and free boundary problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **60** (1976) 101-148.

[18] Yasuda, M.;*On a randomized strategy in Neveu's stopping problem*, Stoch. Proc. Appli. **21**(1985) 159-166.